

Libris
Respect pentru armonia și călătoria
Adrian ZANOSCHI
Gheorghe IUREA
Gabriel POPA

matematică

**algebră
geometrie**

clasa a VII-a

mate 2000 – standard

ÎNVĂȚARE STANDARD[®]
aprofundare

Editura Paralela 45

| | |
|-----------------------------|---|
| CUVÂNT-ÎNAINTE | 5 |
|-----------------------------|---|

PROBLEME RECAPITULATIVE CLASA A VI-A

| | |
|-----------------------------|----|
| ALGEBRĂ..... | 7 |
| GEOMETRIE..... | 11 |
| TESTE INIȚIALE | 15 |

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

| | |
|---|----|
| I.1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect. Calculul rădăcinii pătrate a unui număr natural pătrat perfect..... | 19 |
| I.2. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr rațional..... | 23 |
| I.3. Numere iraționale, exemple, estimări. Mulțimea numerelor reale. Incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ | 26 |
| I.4. Compararea și ordonarea numerelor reale. Reprezentarea numerelor reale pe axă prin aproximări..... | 31 |
| I.5. Modulul unui număr real..... | 33 |
| I.6. Reguli de calcul cu radicali. Scoaterea și introducerea factorilor sub radical..... | 36 |
| I.7. Adunarea și scăderea numerelor reale..... | 39 |
| I.8. Înmulțirea și împărțirea numerelor reale. Raționalizarea numitorilor de forma $a\sqrt{b}$ | 42 |
| I.9. Puterea cu exponent întreg a unui număr real..... | 46 |
| I.10. Ordinea efectuării operațiilor cu numere reale..... | 48 |
| I.11. Media aritmetică ponderată a n numere reale, $n \geq 2$ | 55 |
| I.12. Media geometrică a două numere reale pozitive..... | 57 |
| I.13. Ecuații de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$ | 59 |
| Recapitulare și sistematizare prin teste..... | 61 |

CAPITOLUL II. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

| | |
|--|----|
| II.1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități..... | 63 |
| II.2. Ecuații de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Mulțimea soluțiilor unei ecuații. Ecuații echivalente..... | 65 |
| II.3. Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute..... | 68 |
| II.4. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau al sistemelor de ecuații liniare..... | 72 |
| Recapitulare și sistematizare prin teste..... | 75 |

CAPITOLUL III. ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR

| | |
|--|-----|
| III.1. Date statistice – recapitulare și completări. Poligonul frecvențelor | 77 |
| III.2. Sistem de axe ortogonale în plan. Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale | 84 |
| III.3. Distanța între două puncte din plan..... | 88 |
| III.4. Produsul cartezian a două mulțimi nevide. Reprezentarea într-un sistem de axe ortogonale a unor perechi de numere reale | 92 |
| III.5. Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice..... | 96 |
| Recapitulare și sistematizare prin teste..... | 101 |

GEOMETRIE

CAPITOLUL IV. PATRULATERUL

| | |
|--|-----|
| IV.1. Patrulaterul convex..... | 104 |
| IV.2. Paralelogramul..... | 107 |
| IV.3. Aplicații ale paralelogramului în geometria triunghiului: linia mijlocie în triunghi, centrul de greutate al unui triunghi | 111 |
| IV.4. Dreptunghiul | 114 |
| IV.5. Rombul | 117 |
| IV.6. Pătratul | 120 |
| IV.7. Trapezul. Linia mijlocie în trapez..... | 123 |
| IV.8. Trapezul isoscel..... | 127 |
| IV.9. Arii | 129 |
| Recapitulare și sistematizare prin teste..... | 137 |

CAPITOLUL V. CERCUL

| | |
|--|-----|
| V.1. Probleme recapitulative din materia clasei a VI-a | 139 |
| V.2. Coarde și arce în cerc. Proprietăți | 142 |
| V.3. Unghi înscris în cerc..... | 146 |
| V.4. Tangente dintr-un punct exterior la un cerc..... | 149 |
| V.5. Poligoane regulate înscrise într-un cerc. Definiție, desen..... | 153 |
| V.6. Lungimea cercului și aria discului | 155 |
| Recapitulare și sistematizare prin teste..... | 160 |

CAPITOLUL VI. ASEMĂNAREA

| | |
|---|-----|
| VI.1. Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante | 162 |
| VI.2. Teorema lui Thales. Împărțirea unui segment în părți proporționale cu numere (segmente) date..... | 167 |
| VI.3. Reciproca teoremei lui Thales | 173 |
| VI.4. Triunghiuri asemenea. Teorema fundamentală a asemănării | 177 |
| VI.5. Criterii de asemănare a triunghiurilor | 180 |

| | |
|---|-----|
| VI.6. Aplicații. Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea. Aproximarea în situații practice a distanțelor folosind asemănarea | 185 |
| Recapitulare și sistematizare prin teste | 191 |

CAPITOLUL VII. RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

| | |
|--|-----|
| VII.1. Proiecții ortogonale pe o dreaptă | 193 |
| VII.2. Teorema înălțimii..... | 194 |
| VII.3. Teorema catetei | 196 |
| VII.4. Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora..... | 199 |
| VII.5. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic: sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unui unghi ascuțit..... | 202 |
| VII.6. Rezolvarea triunghiului dreptunghic | 205 |
| VII.7. Calculul elementelor (latură, apotemă, arie, perimetru) în triunghiul echilateral, în pătrat și în hexagonul regulat..... | 209 |
| Recapitulare și sistematizare prin teste..... | 212 |

PROBLEME RECAPITULATIVE

| | |
|----------------|-----|
| ALGEBRĂ | 214 |
| GEOMETRIE..... | 219 |

| | |
|-------------------------------|-----|
| INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI | 225 |
|-------------------------------|-----|

CAPITOLUL I

MULȚIMEA NUMERELOR REALE

I.1. RĂDĂCINA PĂTRATĂ A UNUI NUMĂR NATURAL PĂTRAT PERFECT. CALCULUL RĂDĂCINII PĂTRATE A UNUI NUMĂR NATURAL PĂTRAT PERFECT



Pătratul unui număr natural n este numărul $n^2 = n \cdot n$. Un număr de forma n^2 , cu $n \in \mathbb{N}$, se numește **număr natural pătrat perfect**.

Exemple: $0 = 0^2$, $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$ etc. sunt numere naturale pătrate perfecte.

DEFINIȚIE: **Rădăcina pătrată** a unui număr natural pătrat perfect x (sau *radical* din x) este numărul natural y al cărui pătrat este x , adică $x = y^2$.

Pentru a desemna rădăcina pătrată folosim simbolul $\sqrt{\quad}$.

Exemple: $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$ etc.

Observații:

$$1. \quad 3 \xrightleftharpoons[\text{rădăcină pătrată}]{\text{pătrat}} 9$$

2. Dacă $x, y \in \mathbb{N}$, atunci $\sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2$.

3. În mulțimea numerelor întregi (\mathbb{Z}) există două numere care ridicate la pătrat dau, de exemplu, 9, aceste numere fiind -3 și 3 . Prin definiție, rădăcina pătrată a lui 9 este numărul pozitiv 3. Deci, $\sqrt{9} \neq -3$.

Vom prezenta, în continuare, **două metode de calcul a rădăcinii pătrate** a unui număr natural pătrat perfect.

M1. Descompunerea numărului considerat în factori primi

Exemple: 1) $1024 = 2^{10} = (2^5)^2 \Rightarrow \sqrt{1024} = 2^5 = 32$;

2) $13689 = 3^4 \cdot 13^2 = (3^2 \cdot 13)^2 \Rightarrow \sqrt{13689} = 3^2 \cdot 13 = 117$.

M2. Algoritm de extragere a rădăcinii pătrate

Pentru a ilustra metoda, vom calcula $\sqrt{18225}$.

Respect pentru oameni și cărți

$$\text{I. } \sqrt{1 \mid 82 \mid 25}$$

Despărțim numărul în grupe de câte două cifre, de la dreapta la stânga.

$$\text{II. } \begin{array}{r|l} \sqrt{1 \mid 82 \mid 25} & 1 \\ \underline{1} & \\ \hline & \end{array}$$

Căutăm cel mai mare număr natural al cărui pătrat este mai mic sau egal cu 1. Scriem acest număr, 1, în dreapta sus, iar pătratul său $1^2 = 1$ îl așezăm sub 1 (stânga) și efectuăm scăderea.

$$\text{III. } \begin{array}{r|l} \sqrt{1 \mid 82 \mid 25} & 1 \\ \underline{1} & 2 \\ \hline & = 8.2 \end{array}$$

Coborâm, în stânga, grupa următoare (82) și despărțim ultima cifră cu un punct, iar în dreapta coborâm dublul lui 1, adică 2.

$$\text{IV. } \begin{array}{r|l} \sqrt{1 \mid 82 \mid 25} & 13 \\ \underline{1} & \underline{24 \cdot 4 = 96} \\ = 8.2 & \underline{23 \cdot 3 = 69} \\ \underline{69} & \\ 13 & \end{array}$$

Împărțim pe 8 la 2, obținem câtul 4. Așezăm pe 4 la dreapta lui 2 și înmulțim numărul astfel format cu 4: $24 \cdot 4 = 96$. Cum $96 > 82$, reluăm operația anterioară cu predecesorul lui 4, care este 3: $23 \cdot 3 = 69 < 82$. Scriem 69 sub 82 (în stânga) și facem scăderea. Pe 3 îl scriem în dreapta sus, lângă 1.

$$\text{V. } \begin{array}{r|l} \sqrt{1 \mid 82 \mid 25} & 135 \\ \underline{1} & \underline{24 \cdot 4 = 96} \\ = 8.2 & \underline{23 \cdot 3 = 69} \\ \underline{69} & \underline{265 \cdot 5 = 1325} \\ 132.5 & \\ \underline{1325} & \\ ===== & \end{array}$$

Coborâm, în stânga, următoarea grupă și despărțim ultima cifră printr-un punct. În dreapta coborâm dublul lui 13 ($13 \cdot 2 = 26$). Numărul 26 se cuprinde în 132 de cinci ori. Trecem pe 5 în dreapta lui 26 și înmulțim rezultatul cu 5, astfel: $265 \cdot 5 = 1325$. Diferența din stânga este zero. Scriem în dreapta sus, lângă 13, pe 5.

Algoritmul este astfel încheiat, iar $\sqrt{18225} = 135$.

PROBLEME REZOLVATE

Respect pentru oameni și cărți

1. Calculați: $\sqrt{324}$, $\sqrt{5184}$ și $\sqrt{10 \cdot 2^3 \cdot 5^5}$.

Soluție: Vom descompune numerele de sub radicali în factori primi. Astfel, obținem:

$$\sqrt{324} = \sqrt{2^2 \cdot 3^4} = \sqrt{(2 \cdot 3^2)^2} = 2 \cdot 3^2 = 18,$$

$$\sqrt{5184} = \sqrt{2^6 \cdot 3^4} = \sqrt{(2^3 \cdot 3^2)^2} = 2^3 \cdot 3^2 = 72,$$

$$\sqrt{10 \cdot 2^3 \cdot 5^5} = \sqrt{2^4 \cdot 5^6} = \sqrt{(2^2 \cdot 5^3)^2} = 2^2 \cdot 5^3 = 500.$$

2. Determinați numărul natural n , știind că $n = \sqrt{16 \cdot 3^{10} + 3^{12}}$.

Soluție: Cum $16 \cdot 3^{10} + 3^{12} = 3^{10} \cdot (16 + 9) = 3^{10} \cdot 5^2 = (3^5 \cdot 5)^2$, rezultă că $n = 3^5 \cdot 5 = 1215$.

3. Determinați numărul natural x , știind că $\sqrt{2x+1} - 3 = 12$.

Soluție: Deoarece $\sqrt{2x+1} = 15$, înseamnă că $2x + 1 = 15^2$, deci $2x = 224$ sau $x = 112$.

4. Determinați cifrele a, b, x, y , pentru care $\sqrt{4ab} = \overline{xy}$.

Soluție: Evident, dacă extragem radicalul din $\overline{4ab}$, obținem un număr de două cifre, cu prima cifră 2, deci $x = 2$. Deoarece $20^2 = 400$, $21^2 = 441$, $22^2 = 484$, iar $23^2 = 529$, rezultă că $a = b = 0$ și $y = 0$ sau $a = 4$, $b = 1$ și $y = 1$ sau $a = 8$, $b = 4$ și $y = 2$.

PROBLEME PROPUSE

- Determinați pătratele următoarelor numere naturale: 11, 12, 13, 14, 15, 20 și 160.
- Ridicați la pătrat următoarele numere și scrieți de fiecare dată rezultatul ca produs de puteri ale unor numere prime: 2^5 , $2^3 \cdot 3$, $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, $3^{11} \cdot 5^7$, $2^n \cdot 7^{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$).
- Scrieți toate numerele naturale pătrate perfecte cuprinse între 200 și 500.
- Arătați că următoarele numere naturale sunt pătrate perfecte:
 - 25, 36, 81, 100, 900;
 - $5^4, 2^6, 12^{10}, 6^{2n}, 13^{4n+6}$ ($n \in \mathbb{N}$).
- Arătați că următoarele numere naturale sunt pătrate perfecte:
 - $3^2 + 4^2$;
 - $3^2 + 4^2 + 12^2$;
 - $3^7 + 3^6$;
 - $2^{11} - 2^{10}$;
 - $2 \cdot 3^3 \cdot 6^5$;
 - $3^3 \cdot 12^5$.
- Efectuați următoarele calcule și scrieți rezultatul sub formă de pătrat perfect:
 - $3 \cdot (3 \cdot 29 + 91 : 7 - 52)$;
 - $1 + 3 + 5 + \dots + 49$;
 - $2^{51} + 7 \cdot 2^{50}$;
 - $9^{30} : 3^{11} + 10 \cdot 3^{48} - 3^{50}$.
- Determinați câte elemente are mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este pătrat perfect și } x \leq 1000\}$.
- a) Care poate fi ultima cifră a pătratului unui număr natural?
b) Arătați că, dacă n este un număr natural, atunci numerele naturale $5n + 2$ și $5n + 7$ nu sunt pătrate perfecte.

9. Arătați că numărul $a = 3^{45} + 2^{62}$ nu este pătrat perfect.

10. Calculați (utilizând descompunerea în factori primi):

- a) $\sqrt{4}$; $\sqrt{64}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{196}$; $\sqrt{2500}$;
 b) $\sqrt{2^2}$; $\sqrt{3^6}$; $\sqrt{2^2 \cdot 5^6}$; $\sqrt{6^4 \cdot 3^8}$; $\sqrt{2^2 \cdot 3^6 \cdot 5^4}$;
 c) $\sqrt{2^{2n}}$; $\sqrt{3^{4m}}$; $\sqrt{2^{2n} \cdot 5^{6m}}$; $\sqrt{7^{4n+2}}$; $\sqrt{2^{6m-4}}$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$);
 d) $\sqrt{12 \cdot 3^{11}}$; $\sqrt{18 \cdot 2^{13}}$; $\sqrt{6^3 \cdot 2^5 \cdot 3^{11}}$; $\sqrt{7^{31} + 2 \cdot 7^{30}}$; $\sqrt{3^{22} - 2 \cdot 3^{21} + 3^{20}}$.

11. Calculați (folosind algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate):

- a) $\sqrt{225}$; $\sqrt{441}$; $\sqrt{576}$;
 b) $\sqrt{1764}$; $\sqrt{3136}$; $\sqrt{7056}$;
 c) $\sqrt{10404}$; $\sqrt{50625}$; $\sqrt{64516}$.

12. Calculați:

- a) $\sqrt{36} + \sqrt{64} - \sqrt{81}$;
 b) $\sqrt{100} - (\sqrt{169} - \sqrt{25})$;
 c) $\sqrt{9} + \sqrt{196} : \sqrt{49}$;
 d) $(\sqrt{256} - \sqrt{144}) : \sqrt{4}$;
 e) $(\sqrt{0} + \sqrt{1})^7 + \sqrt{361}$;
 f) $(2 + \sqrt{324}) \cdot \sqrt{16}$;
 g) $(\sqrt{289} + \sqrt{169}) : \sqrt{225}$;
 h) $2 \cdot \sqrt{121} - \sqrt{441}$.

13. Calculați:

- a) $\sqrt{1+3+5+7+9+11}$;
 b) $\sqrt{20-32:(7-5)}$;
 c) $\sqrt{104:2+4 \cdot 3}$;
 d) $\sqrt{(14-6) \cdot (7+11)}$;
 e) $\sqrt{2^8+2^{11}}$;
 f) $\sqrt{15^2+20^2}$;
 g) $\sqrt{3^2+4^2+12^2}$;
 h) $\sqrt{3(7^{12}-7^{10})}$.

14. Determinați $x \in \mathbb{N}$, știind că:

- a) $\sqrt{x} = 15$; b) $\sqrt{x-2} = 16$; c) $7 + \sqrt{x} = 12$; d) $\sqrt{x+3} - 4 = 6$.

15. Calculați \sqrt{abc} , știind că $\sqrt{1ba} = \bar{c}3$.

16. Determinați numărul natural \overline{abcd} , știind că $\sqrt{\overline{abc5}} = \bar{3d}$.

17. Aflați lungimea laturii unui ring de box în formă de pătrat cu aria de 36 m^2 .

18. Aflați perimetrul unui pătrat echivalent cu un dreptunghi cu lungimea $L = 175 \text{ cm}$ și lățimea $l = 28 \text{ cm}$ (două figuri plane se numesc echivalente dacă au ariile egale).

19. Podeaua unei camere are forma unui dreptunghi cu dimensiunile $L = 12 \text{ m}$ și $l = 8 \text{ m}$. Pentru pavarea ei se folosesc 384 plăci pătrate de gresie cu latura de $x \text{ cm}$. Aflați valoarea lui x .

20. Un teren de fotbal are lățimea egală cu $\frac{2}{5}$ din lungime și suprafața de 2 560 m².

Respect pentru oameni și cărți
Determinați perimetrul terenului.

21. Un stilou costă a lei. Dacă prețul său se mărește cu $a\%$, atunci stiloul va costa cu 3,24 lei mai mult. Aflați prețul inițial al stiloului.



1.2. RĂDĂCINA PĂTRATĂ A PĂTRATULUI UNUI NUMĂR RAȚIONAL

DEFINIȚIE: Rădăcina pătrată a pătratului unui număr rațional (sau radical din p) este numărul rațional q , $q \geq 0$, astfel încât $p = q^2$.

Acest număr se notează astfel: \sqrt{p} .

Observație: Cu toate că $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$, rădăcina pătrată a lui $\frac{4}{9}$ este, prin definiție, $\frac{2}{3}$. Deci, $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \left|-\frac{2}{3}\right|$.

Exemple: $\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$, $\sqrt{\frac{1}{121}} = \frac{1}{11}$; $\sqrt{0,04} = 0,2$, $\sqrt{0,(4)} = \frac{2}{3}$; $\sqrt{(-7)^2} = 7$; $\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$;
 $\sqrt{\frac{2^2 \cdot 3^4}{5^6}} = \frac{2 \cdot 3^2}{5^3}$ etc.

Observații:

1. Dacă pătratul unui număr rațional este scris sub formă de fracție ordinară ireductibilă, atunci rădăcina sa pătrată poate fi găsită descompunând în factori primi numărătorul și numitorul.

Exemple: $\sqrt{\frac{784}{88209}} = \sqrt{\frac{2^4 \cdot 7^2}{3^6 \cdot 11^2}} = \sqrt{\left(\frac{2^2 \cdot 7}{3^3 \cdot 11}\right)^2} = \frac{2^2 \cdot 7}{3^3 \cdot 11} = \frac{28}{297}$;

$\sqrt{\frac{40 \cdot 2^5 \cdot 5^3}{63 \cdot 3^4 \cdot 7}} = \sqrt{\frac{2^8 \cdot 5^4}{3^6 \cdot 7^2}} = \sqrt{\left(\frac{2^4 \cdot 5^2}{3^3 \cdot 7}\right)^2} = \frac{2^4 \cdot 5^2}{3^3 \cdot 7} = \frac{400}{189}$.

2. Pentru a calcula rădăcina pătrată a pătratului unui număr rațional, scris sub formă de fracție zecimală, putem folosi un algoritm asemănător cu cel descris în paragraful precedent.

Exemplu: Să calculăm $\sqrt{686,44}$.

I. $\sqrt{6 \mid 86,44}$

II.
$$\begin{array}{r|l} \sqrt{6 \mid 86,44} & 26 \\ \hline 4 & \underline{47 \cdot 7 = 329} \\ 28.6 & 46 \cdot 6 = 276 \\ \underline{27.6} & \\ = 10 & \end{array}$$

III.
$$\begin{array}{r|l} \sqrt{6 \mid 86,44} & 26,2 \\ \hline 4 & \underline{47 \cdot 7 = 329} \\ 28.6 & 46 \cdot 6 = 276 \\ \underline{27.6} & 522 \cdot 2 = 1044 \\ = 104.4 & \\ \underline{104.4} & \\ ===== & \end{array}$$

Despărțim numărul în grupe de câte două cifre, de la virgulă spre stânga și spre dreapta. Avem astfel 3 grupe: 6, 85 și 44.

Procedăm ca la numerele naturale până ajungem la virgulă. După aceea, punem virgula în dreapta, după rezultatul obținut.

Continuăm să efectuăm calculele conform algoritmului de extragere a radicalului de la numere naturale..

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie $a = \sqrt{0,16} + \sqrt{3,24} - \sqrt{1\frac{11}{25}}$. Arătați că a este număr natural.

Soluție: Avem: $a = \sqrt{(0,4)^2} + \sqrt{(1,8)^2} - \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2} = 0,4 + 1,8 - \frac{6}{5} = 2,2 - 1,2 = 1 \in \mathbb{N}$.

2. Fie x, y două cifre diferite de 0 și 9. Dacă $a = \overline{xy}$ și $b = \overline{0,(x)} + \overline{0,(y)}$ sunt pătrate în \mathbb{N} , respectiv \mathbb{Q} , calculați $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Soluție: Deoarece $b = \frac{x+y}{9}$ este pătrat al unui număr rațional, rezultă că $x + y \in \{4, 9, 16\}$, de unde, având în vedere că și \overline{xy} este pătrat perfect, deducem că $\overline{xy} \in \{36, 81\}$. Deci, suma $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ poate fi 8 sau 12.

3. Determinați $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, știind că $a < b$ și $\sqrt{1,(\overline{a})+2,(\overline{b})} \in \mathbb{Q}$.

Soluție: Dacă $\sqrt{1,(\overline{a})+2,(\overline{b})} \in \mathbb{Q}$, atunci există un număr rațional q , astfel încât $\overline{1,(\overline{a})+2,(\overline{b})} = q^2$. Deoarece $\overline{1,(\overline{a})+2,(\overline{b})} = 3 + \frac{a+b}{9} = \frac{27+a+b}{9}$, rezultă că $27 + a + b$ trebuie să fie pătrat perfect, deci $27 + a + b = 36$ (căci $a + b \leq 16$), de unde obținem $a + b = 9$. Soluțiile problemei sunt: $(a, b) \in \{(1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5)\}$.

1. Calculați:

a) $\sqrt{\frac{121}{49}}$;

b) $\sqrt{\frac{25}{144}}$;

c) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$;

d) $\sqrt{42\frac{1}{4}}$;

e) $\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2}$;

f) $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^4}$.

2. Calculați:

a) $\sqrt{0,36}$;

b) $\sqrt{0,09}$;

c) $\sqrt{2,25}$;

d) $\sqrt{11,56}$;

e) $\sqrt{52,5625}$;

f) $\sqrt{0,000169}$.

3. Fie $a = \sqrt{\frac{4}{25}} + \sqrt{1\frac{11}{25}} \cdot \sqrt{0,09} \cdot \sqrt{100}$. Arătați că a este număr natural.

4. Fie $a = \sqrt{\left(-\frac{13}{3}\right)^2} - \sqrt{\left(-\frac{5}{6}\right)^2} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{\frac{225}{144}}$. Arătați că a este un număr natural.

5. Fie $a = \sqrt{\frac{169}{36}} + \sqrt{1,7} + \sqrt{30,25}$. Calculați \sqrt{a} .

6. Fie $a = \frac{\sqrt{1,21} - \sqrt{0,01}}{\sqrt{0,04} + \sqrt{0,09}} \cdot \sqrt{17^2 - 15^2}$. Arătați că a este număr natural pătrat perfect.

7. Calculați:

a) $\sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt{\frac{49}{36}} \cdot \sqrt{4}$;

b) $\left(\sqrt{\frac{25}{4}} - \sqrt{\frac{169}{16}}\right) \cdot \sqrt{\frac{4}{81}}$;

c) $\sqrt{\frac{196}{9}} : \sqrt{\frac{49}{81}} - \sqrt{\frac{121}{4}}$;

d) $\sqrt{\frac{4}{25}} + \sqrt{\frac{9}{16}} \cdot \left(\sqrt{\frac{289}{25}} - \sqrt{\frac{169}{25}}\right)$.

8. Determinați numărul $a = \sqrt{\left(\frac{8}{7} + \frac{9}{14} + \frac{10}{21} + \dots + \frac{35}{196}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{28}\right)}$.

9. Determinați numărul $a = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{48 \cdot 49} + \frac{1}{49 \cdot 50}\right)}$.

10. Determinați numărul rațional x , știind că:

a) $\sqrt{x} = 0,1$;

b) $\sqrt{x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$;

c) $\sqrt{2x-1} = 1,2$;

d) $\sqrt{\frac{x}{x+5}} = \frac{2}{3}$.

11. Fie $x = \frac{\sqrt{625}}{11} \cdot \frac{14}{\sqrt{25}} \cdot \frac{11}{\sqrt{196}}$. Calculați $\sqrt{\frac{5x}{x+4}}$.

12. Aflați câte elemente are mulțimea $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid -\sqrt{5\frac{19}{25}} \leq x \leq \sqrt{28\frac{4}{9}} \right\}$.

13. Fie x și y două numere naturale, astfel încât $0 < x < y < 9$. Determinați toate valorile posibile ale numărului rațional $q = \sqrt{0,xx(y)+0,yy(x)}$.

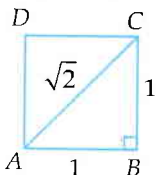
14. Determinați numărul natural \overline{abcd} , știind că $\sqrt{1a0bc} = 35 \cdot d$.

1.3. NUMERE IRAȚIONALE, EXEMPLE, ESTIMĂRI. MULȚIMEA NUMERELOR REALE. INCLUZIUNILE $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



În paragraful precedent am definit rădăcina pătrată a pătratului unui număr rațional și am arătat cum se calculează această rădăcină. Vom vedea acum că este nevoie să considerăm și rădăcina pătrată a numerelor raționale pozitive care nu sunt pătrate în \mathbb{Q} .

Exemplu: Fie $ABCD$ un pătrat cu latura $AB = 1$ cm. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ABC , obținem $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2$. Deci, ar fi normal să scriem $AC = \sqrt{2}$ (cm).



Acest rezultat, $\sqrt{2}$, nu este însă număr rațional!

Exemplul precedent pune în evidență necesitatea introducerii unor numere noi, care nu aparțin lui \mathbb{Q} . Astfel de numere sunt: $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{1,6}$; $\sqrt{\frac{3}{4}}$ etc. Acestea pot fi, de exemplu, considerate ca lungimile laturilor unor pătrate cu aria (respectiv) de 3; 5; 1,6; $\frac{3}{4}$ etc., dar ele apar și în alte probleme de matematică.

Se poate demonstra că, dacă $a \in \mathbb{Q}_+$ și a nu este pătrat în \mathbb{Q} , atunci $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$.

Numerele de forma $\pm\sqrt{a}$, unde $a \in \mathbb{Q}_+$ și a nu este pătrat în \mathbb{Q} , se numesc numere **iraționale**.

Exemple: $\sqrt{2}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{\frac{25}{7}}$, $\sqrt{1,6}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{0,2}$ sunt numere iraționale.

Există o infinitate de numere iraționale care nu se exprimă cu ajutorul radicalilor definiți anterior. Unul dintre aceste numere este π , care este egal cu raportul dintre lungimea unui cerc și diametrul său. Altul este $\sqrt[3]{2}$.

Deoarece numerele raționale ne sunt mult mai familiare decât cele iraționale, vom încerca, de multe ori, să aproximăm (să estimăm) numerele iraționale prin numere raționale.

Îată cum putem face acest lucru pentru $\sqrt{2}$:

$$1 < 2 < 4 \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2$$

$$(1,4)^2 < 2 < (1,5)^2 \Rightarrow 1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

$$(1,41)^2 < 2 < (1,42)^2 \Rightarrow 1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

$$(1,414)^2 < 2 < (1,415)^2 \Rightarrow 1,414 < \sqrt{2} < 1,415$$

⋮

Valorile aproximative pentru $\sqrt{2}$ sunt:

| | Prin lipsă | Prin adaos | |
|------------------------------------|------------|------------|----------------------------|
| Cu aproximație de o unitate | 1 | 2 | $1 < \sqrt{2} < 2$ |
| Cu aproximație de o zecime | 1,4 | 1,5 | $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ |
| Cu aproximație de o sutime | 1,41 | 1,42 | $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ |
| Cu aproximație de o miime | 1,414 | 1,415 | $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ |

De obicei, aproximăm $\sqrt{2}$ cu 1,41: $\sqrt{2} \approx 1,41$.

În mod analog, putem aproxima cu oricâte zecimale dorim (prin lipsă sau prin adaos) numerele iraționale $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$ etc.

Exemple: $\sqrt{3} \approx 1,73$ (aproximație de o sutime, prin lipsă)

$\sqrt{5} \approx 2,24$ (aproximație de o sutime, prin adaos)

$\sqrt{10} \approx 3,2$ (aproximație de o zecime, prin adaos)

$\pi \approx 3,14$ (aproximație de o sutime, prin lipsă).

Observație: Pentru a reține mai multe zecimale ale numărului π (ele sunt o infinitate și nu se repetă periodic!) putem memora propoziția:

„Așa e bine a scrie renumitul și utilul număr”, în care numărul literelor fiecărui cuvânt reprezintă o cifră din aproximarea lui π :

așa $\rightarrow 3$, e $\rightarrow 1$, bine $\rightarrow 4$, a $\rightarrow 1$, scrie $\rightarrow 5$, renumitul $\rightarrow 9$, și $\rightarrow 2$, utilul $\rightarrow 6$, număr $\rightarrow 5$.

Prin urmare, $\pi \approx 3,14159265$.

Mulțimea numerelor reale, notată cu \mathbb{R} , este reuniunea dintre mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale.

Între mulțimile \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} există următoarele relații de incluziune:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$