Adrian ZANOSCHI
Gheorghe IUREA
Gabriel POPA

matematică

algebră
geometrie

clasa a VII-a

mate 2000 – standard

ÎNVĂȚARE STANDARD ®
aprofundare

Editura Paralela 45

Cuprins

CAPITOLUL VII. RELAŢII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

PROBLEME RECAPITULATIVE

CAPITOLUL I
MULȚIMEA NUMERELOR REALE

I.1. RĂDĂCINA PĂTRATĂ A UNUI NUMĂR NATURAL PĂTRAT PERFECT. CALCULUL RĂDĂCINII PĂTRATE A UNUI NUMĂR NATURAL PĂTRAT PERFECT

Pătratul unui număr natural n este numărul $n^2 = n \cdot n$. Un număr de forma n^2, cu $n \in \mathbb{N}$, se numește **număr natural pătrat perfect**.

Exemple: $0 = 0^2$, $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$ etc. sunt numere naturale pătrate perfecte.

DEFINIȚIE: **Rădăcina pătrată** a unui număr natural pătrat perfect x (sau *radical* din x) este numărul natural y al cărui pătrat este x, adică $x = y^2$.

Pentru a desemna rădăcina pătrată folosim simbolul $\sqrt{}$.

Exemple: $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$ etc.

Observații:

1. $3 \underset{\text{rădăcină pătrată}}{\overset{\text{pătrat}}{\rightleftarrows}} 9$

2. Dacă $x, y \in \mathbb{N}$, atunci $\sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2$.

3. În mulțimea numerelor întregi ($\mathbb{Z}$) există două numere care ridicate la pătrat dau, de exemplu, 9, aceste numere fiind -3 și 3. Prin definiție, rădăcina pătrată a lui 9 este numărul pozitiv 3. Deci, $\sqrt{9} \neq -3$.

Vom prezenta, în continuare, **două metode de calcul a rădăcinii pătrate** a unui număr natural pătrat perfect.

M1. Descompunerea numărului considerat în factori primi

Exemple: 1) $1024 = 2^{10} = (2^5)^2 \Rightarrow \sqrt{1024} = 2^5 = 32$;

2) $13689 = 3^4 \cdot 13^2 = (3^2 \cdot 13)^2 \Rightarrow \sqrt{13689} = 3^2 \cdot 13 = 117$.

M2. Algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate

Pentru a ilustra metoda, vom calcula $\sqrt{18225}$.

I. $\sqrt{1\,|\,82\,|\,25}$

Despărţim numărul în grupe de câte două cifre, de la dreapta la stânga.

II.
$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{1\,|\,82\,|\,25} & 1 \\ \cline{2-2}
\underline{1} & \\
= &
\end{array}$$

Căutăm cel mai mare număr natural al cărui pătrat este mai mic sau egal cu 1. Scriem acest număr, 1, în dreapta sus, iar pătratul său $1^2 = 1$ îl aşezăm sub 1 (stânga) şi efectuăm scăderea.

III.
$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{1\,|\,82\,|\,25} & 1 \\ \cline{2-2}
\underline{1} & 2 \\
= 8.2 &
\end{array}$$

Coborâm, în stânga, grupa următoare (82) şi despărţim ultima cifră cu un punct, iar în dreapta coborâm dublul lui 1, adică 2.

IV.
$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{1\,|\,82\,|\,25} & 13 \\ \cline{2-2}
\underline{1} & \cancel{24 \cdot 4 = 96} \\
= 8.2 & 23 \cdot 3 = 69 \\
\quad \underline{6\,9} & \\
\quad 1\,3 &
\end{array}$$

Împărţim pe 8 la 2, obţinem câtul 4. Aşezăm pe 4 la dreapta lui 2 şi înmulţim numărul astfel format cu 4: $24 \cdot 4 = 96$. Cum $96 > 82$, reluăm operaţia anterioară cu predecesorul lui 4, care este 3: $23 \cdot 3 = 69 < 82$. Scriem 69 sub 82 (în stânga) şi facem scăderea. Pe 3 îl scriem în dreapta sus, lângă 1.

V.
$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{1\,|\,82\,|\,25} & 135 \\ \cline{2-2}
\underline{1} & \cancel{24 \cdot 4 = 96} \\
= 8.2 & 23 \cdot 3 = 69 \\
\quad \underline{6\,9} & 265 \cdot 5 = 1325 \\
\quad 1\,3\,2.5 & \\
\quad \underline{1\,3\,2\,5} & \\
\quad = = = = &
\end{array}$$

Coborâm, în stânga, următoarea grupă şi despărţim ultima cifră printr-un punct. În dreapta coborâm dublul lui 13 ($13 \cdot 2 = 26$). Numărul 26 se cuprinde în 132 de cinci ori. Trecem pe 5 în dreapta lui 26 şi înmulţim rezultatul cu 5, astfel: $265 \cdot 5 = 1325$. Diferenţa din stânga este zero. Scriem în dreapta sus, lângă 13, pe 5.

Algoritmul este astfel încheiat, iar $\sqrt{18225} = 135$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Calculați: $\sqrt{324}$, $\sqrt{5184}$ şi $\sqrt{10 \cdot 2^3 \cdot 5^5}$.

Soluție: Vom descompune numerele de sub radicali în factori primi. Astfel, obținem:

$\sqrt{324} = \sqrt{2^2 \cdot 3^4} = \sqrt{(2 \cdot 3^2)^2} = 2 \cdot 3^2 = 18$,

$\sqrt{5184} = \sqrt{2^6 \cdot 3^4} = \sqrt{(2^3 \cdot 3^2)^2} = 2^3 \cdot 3^2 = 72$,

$\sqrt{10 \cdot 2^3 \cdot 5^5} = \sqrt{2^4 \cdot 5^6} = \sqrt{(2^2 \cdot 5^3)^2} = 2^2 \cdot 5^3 = 500$.

2. Determinați numărul natural n, ştiind că $n = \sqrt{16 \cdot 3^{10} + 3^{12}}$.

Soluție: Cum $16 \cdot 3^{10} + 3^{12} = 3^{10} \cdot (16 + 9) = 3^{10} \cdot 5^2 = (3^5 \cdot 5)^2$, rezultă că $n = 3^5 \cdot 5 = 1215$.

3. Determinați numărul natural x, ştiind că $\sqrt{2x+1} - 3 = 12$.

Soluție: Deoarece $\sqrt{2x+1} = 15$, înseamnă că $2x + 1 = 15^2$, deci $2x = 224$ sau $x = 112$.

4. Determinați cifrele a, b, x, y, pentru care $\sqrt{\overline{4ab}} = \overline{xy}$.

Soluție: Evident, dacă extragem radicalul din $\overline{4ab}$, obținem un număr de două cifre, cu prima cifră 2, deci $x = 2$. Deoarece $20^2 = 400$, $21^2 = 441$, $22^2 = 484$, iar $23^2 = 529$, rezultă că $a = b = 0$ şi $y = 0$ sau $a = 4$, $b = 1$ şi $y = 1$ sau $a = 8$, $b = 4$ şi $y = 2$.

PROBLEME PROPUSE

1. Determinați pătratele următoarelor numere naturale: 11, 12, 13, 14, 15, 20 şi 160.

2. Ridicați la pătrat următoarele numere şi scrieți de fiecare dată rezultatul ca produs de puteri ale unor numere prime: 2^5, $2^3 \cdot 3$, $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, $3^{11} \cdot 5^7$, $2^n \cdot 7^{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$).

3. Scrieți toate numerele naturale pătrate perfecte cuprinse între 200 şi 500.

4. Arătați că următoarele numere naturale sunt pătrate perfecte:

a) 25, 36, 81, 100, 900;
b) 5^4, 2^6, 12^{10}, 6^{2n}, 13^{4n+6} ($n \in \mathbb{N}$).

5. Arătați că următoarele numere naturale sunt pătrate perfecte:

a) $3^2 + 4^2$;
b) $3^2 + 4^2 + 12^2$;
c) $3^7 + 3^6$;
d) $2^{11} - 2^{10}$;
e) $2 \cdot 3^3 \cdot 6^5$;
f) $3^3 \cdot 12^5$.

6. Efectuați următoarele calcule şi scrieți rezultatul sub formă de pătrat perfect:

a) $3 \cdot (3 \cdot 29 + 91 : 7 - 52)$;
b) $1 + 3 + 5 + ... + 49$;
c) $2^{51} + 7 \cdot 2^{50}$;
d) $9^{30} : 3^{11} + 10 \cdot 3^{48} - 3^{50}$.

7. Determinați câte elemente are mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ este pătrat perfect şi $x \leq 1000\}$.

8. a) Care poate fi ultima cifră a pătratului unui număr natural?

b) Arătați că, dacă n este un număr natural, atunci numerele naturale $5n + 2$ şi $5n + 7$ nu sunt pătrate perfecte.

9. Arătați că numărul $a = 3^{45} + 2^{62}$ nu este pătrat perfect.

10. Calculați (utilizând descompunerea în factori primi):

a) $\sqrt{4}$; $\sqrt{64}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{196}$; $\sqrt{2500}$;

b) $\sqrt{2^2}$; $\sqrt{3^6}$; $\sqrt{2^2\cdot5^6}$; $\sqrt{6^4\cdot3^8}$; $\sqrt{2^2\cdot3^6\cdot5^4}$;

c) $\sqrt{2^{2n}}$; $\sqrt{3^{4m}}$; $\sqrt{2^{2n}\cdot5^{6m}}$; $\sqrt{7^{4n+2}}$; $\sqrt{2^{6m-4}}$ $(m, n\in\mathbb{N}^*)$;

d) $\sqrt{12\cdot3^{11}}$; $\sqrt{18\cdot2^{13}}$; $\sqrt{6^3\cdot2^5\cdot3^{11}}$; $\sqrt{7^{31}+2\cdot7^{30}}$; $\sqrt{3^{22}-2\cdot3^{21}+3^{20}}$.

11. Calculați (folosind algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate):

a) $\sqrt{225}$; $\sqrt{441}$; $\sqrt{576}$;

b) $\sqrt{1764}$; $\sqrt{3136}$; $\sqrt{7056}$;

c) $\sqrt{10404}$; $\sqrt{50625}$; $\sqrt{64516}$.

12. Calculați:

a) $\sqrt{36}+\sqrt{64}-\sqrt{81}$;

b) $\sqrt{100}-\left(\sqrt{169}-\sqrt{25}\right)$;

c) $\sqrt{9}+\sqrt{196}:\sqrt{49}$;

d) $\left(\sqrt{256}-\sqrt{144}\right):\sqrt{4}$;

e) $\left(\sqrt{0}+\sqrt{1}\right)^7+\sqrt{361}$;

f) $\left(2+\sqrt{324}\right)\cdot\sqrt{16}$;

g) $\left(\sqrt{289}+\sqrt{169}\right):\sqrt{225}$;

h) $2\cdot\sqrt{121}-\sqrt{441}$.

13. Calculați:

a) $\sqrt{1+3+5+7+9+11}$;

b) $\sqrt{20-32:(7-5)}$;

c) $\sqrt{104:2+4\cdot3}$;

d) $\sqrt{(14-6)\cdot(7+11)}$;

e) $\sqrt{2^8+2^{11}}$;

f) $\sqrt{15^2+20^2}$;

g) $\sqrt{3^2+4^2+12^2}$;

h) $\sqrt{3\left(7^{12}-7^{10}\right)}$.

14. Determinați $x\in\mathbb{N}$, știind că:

a) $\sqrt{x}=15$; b) $\sqrt{x-2}=16$; c) $7+\sqrt{x}=12$; d) $\sqrt{x+3}-4=6$.

15. Calculați $\sqrt{\overline{abc}}$, știind că $\sqrt{\overline{1ba}}=\overline{c3}$.

16. Determinați numărul natural $\overline{abcd}$, știind că $\sqrt{\overline{abc5}}=\overline{3d}$.

17. Aflați lungimea laturii unui ring de box în formă de pătrat cu aria de 36 m^2.

18. Aflați perimetrul unui pătrat echivalent cu un dreptunghi cu lungimea L = 175 cm și lățimea l = 28 cm (două figuri plane se numesc echivalente dacă au ariile egale).

19. Podeaua unei camere are forma unui dreptunghi cu dimensiunile L = 12 m și l = 8 m. Pentru pavarea ei se folosesc 384 plăci pătrate de gresie cu latura de x cm. Aflați valoarea lui x.

20. Un teren de fotbal are lățimea egală cu $\frac{2}{5}$ din lungime şi suprafaţa de 2 560 m^2. Determinaţi perimetrul terenului.

21. Un stilou costă a lei. Dacă preţul său se măreşte cu $a\%$, atunci stiloul va costa cu 3,24 lei mai mult. Aflaţi preţul iniţial al stiloului.

1.2. RĂDĂCINA PĂTRATĂ A PĂTRATULUI UNUI NUMĂR RAŢIONAL

DEFINIŢIE: **Rădăcina pătrată** a pătratului unui număr raţional (sau radical din p) este numărul raţional q, $q \geq 0$, astfel încât $p = q^2$.

Acest număr se notează astfel: $\sqrt{p}$.

Observaţie: Cu toate că $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$, rădăcina pătrată a lui $\frac{4}{9}$ este, prin definiţie, $\frac{2}{3}$. Deci, $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \left|-\frac{2}{3}\right|$.

Exemple: $\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$, $\sqrt{\frac{1}{121}} = \frac{1}{11}$; $\sqrt{0,04} = 0,2$, $\sqrt{0,(4)} = \frac{2}{3}$; $\sqrt{(-7)^2} = 7$; $\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$; $\sqrt{\frac{2^2 \cdot 3^4}{5^6}} = \frac{2 \cdot 3^2}{5^3}$ etc.

Observaţii:

1. Dacă pătratul unui număr raţional este scris sub formă de fracţie ordinară ireductibilă, atunci rădăcina sa pătrată poate fi găsită descompunând în factori primi numărătorul şi numitorul.

Exemple: $\sqrt{\frac{784}{88209}} = \sqrt{\frac{2^4 \cdot 7^2}{3^6 \cdot 11^2}} = \sqrt{\left(\frac{2^2 \cdot 7}{3^3 \cdot 11}\right)^2} = \frac{2^2 \cdot 7}{3^3 \cdot 11} = \frac{28}{297}$;

$$\sqrt{\frac{40 \cdot 2^5 \cdot 5^3}{63 \cdot 3^4 \cdot 7}} = \sqrt{\frac{2^8 \cdot 5^4}{3^6 \cdot 7^2}} = \sqrt{\left(\frac{2^4 \cdot 5^2}{3^3 \cdot 7}\right)^2} = \frac{2^4 \cdot 5^2}{3^3 \cdot 7} = \frac{400}{189}.$$

2. Pentru a calcula rădăcina pătrată a pătratului unui număr raţional, scris sub formă de fracţie zecimală, putem folosi un algoritm asemănător cu cel descris în paragraful precedent.

Exemplu: Să calculăm $\sqrt{686,44}$.

I. $\sqrt{6\,|\,86\,,44}$

Despărțim numărul în grupe de câte două cifre, de la virgulă spre stânga și spre dreapta. Avem astfel 3 grupe: 6, 85 și 44.

II.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{6\,|\,86\,,|\,44} & 26 \\ \underline{4} & \cancel{47\cdot 7=329} \\ 28.6 & 46\cdot 6=276 \\ \underline{27.6} & \\ =10 & \end{array}$$

Procedăm ca la numerele naturale până ajungem la virgulă. După aceea, punem virgula în dreapta, după rezultatul obținut.

III.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{6\,|\,86\,,|\,44} & 26,2 \\ \underline{4} & \cancel{47\cdot 7=329} \\ 28.6 & 46\cdot 6=276 \\ \underline{27.6} & 522\cdot 2=1044 \\ =104.4 & \\ \underline{104.4} & \\ ==== & \end{array}$$

Continuăm să efectuăm calculele conform algoritmului de extragere a radicalului de la numere naturale..

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie $a=\sqrt{0,16}+\sqrt{3,24}-\sqrt{1\frac{11}{25}}$. Arătați că a este număr natural.

Soluție: Avem: $a=\sqrt{(0,4)^2}+\sqrt{(1,8)^2}-\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2}=0,4+1,8-\frac{6}{5}=2,2-1,2=1\in\mathbb{N}$.

2. Fie x, y două cifre diferite de 0 și 9. Dacă $a=\overline{xy}$ și $b=\overline{0,(x)}+\overline{0,(y)}$ sunt pătrate în $\mathbb{N}$, respectiv $\mathbb{Q}$, calculați $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Soluție: Deoarece $b=\frac{x+y}{9}$ este pătrat al unui număr rațional, rezultă că $x+y\in\{4, 9, 16\}$, de unde, având în vedere că și $\overline{xy}$ este pătrat perfect, deducem că $\overline{xy}\in\{36, 81\}$. Deci, suma $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ poate fi 8 sau 12.

3. Determinați $a, b\in\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, știind că $a<b$ și $\sqrt{\overline{1,(a)}+\overline{2,(b)}}\in\mathbb{Q}$.

Soluție: Dacă $\sqrt{\overline{1,(a)}+\overline{2,(b)}}\in\mathbb{Q}$, atunci există un număr rațional q, astfel încât $\overline{1,(a)}+\overline{2,(b)}=q^2$. Deoarece $\overline{1,(a)}+\overline{2,(b)}=3+\frac{a+b}{9}=\frac{27+a+b}{9}$, rezultă că $27+a+b$ trebuie să fie pătrat perfect, deci $27+a+b=36$ (căci $a+b\le 16$), de unde obținem $a+b=9$. Soluțiile problemei sunt: $(a, b)\in\{(1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5)\}$.

PROBLEME PROPUSE

1. Calculați:

a) $\sqrt{\frac{121}{49}}$; b) $\sqrt{\frac{25}{144}}$; c) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$;

d) $\sqrt{42\frac{1}{4}}$; e) $\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2}$; f) $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^4}$.

2. Calculați:

a) $\sqrt{0,36}$; b) $\sqrt{0,09}$; c) $\sqrt{2,25}$;

d) $\sqrt{11,56}$; e) $\sqrt{52,5625}$; f) $\sqrt{0,000169}$.

3. Fie $a = \sqrt{\frac{4}{25}} + \sqrt{1\frac{11}{25}} \cdot \sqrt{0,09} \cdot \sqrt{100}$. Arătați că a este număr natural.

4. Fie $a = \sqrt{\left(-\frac{13}{3}\right)^2} - \sqrt{\left(-\frac{5}{6}\right)^2} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{\frac{225}{144}}$. Arătați că a este un număr natural.

5. Fie $a = \sqrt{\frac{169}{36}} + \sqrt{1,(7)} + \sqrt{30,25}$. Calculați $\sqrt{a}$.

6. Fie $a = \frac{\sqrt{1,21} - \sqrt{0,01}}{\sqrt{0,04} + \sqrt{0,09}} \cdot \sqrt{17^2 - 15^2}$. Arătați că a este număr natural pătrat perfect.

7. Calculați:

a) $\sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt{\frac{49}{36}} \cdot \sqrt{4}$; b) $\left(\sqrt{\frac{25}{4}} - \sqrt{\frac{169}{16}}\right) \cdot \sqrt{\frac{4}{81}}$;

c) $\sqrt{\frac{196}{9}} : \sqrt{\frac{49}{81}} - \sqrt{\frac{121}{4}}$; d) $\sqrt{\frac{4}{25}} + \sqrt{\frac{9}{16}} \cdot \left(\sqrt{\frac{289}{25}} - \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{25}}\right)$.

8. Determinați numărul $a = \sqrt{\left(\frac{8}{7} + \frac{9}{14} + \frac{10}{21} + \ldots + \frac{35}{196}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{28}\right)}$.

9. Determinați numărul $a = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{48 \cdot 49} + \frac{1}{49 \cdot 50}\right)}$.

10. Determinați numărul rațional x, știind că:

a) $\sqrt{x} = 0,1$; b) $\sqrt{x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$;

c) $\sqrt{2x - 1} = 1,2$; d) $\sqrt{\frac{x}{x+5}} = \frac{2}{3}$.

11. Fie $x = \dfrac{\sqrt{625}}{11} \cdot \dfrac{14}{\sqrt{25}} \cdot \dfrac{11}{\sqrt{196}}$. Calculați $\sqrt{\dfrac{5x}{x+4}}$.

12. Aflați câte elemente are mulțimea $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid -\sqrt{5\dfrac{19}{25}} \le x \le \sqrt{28\dfrac{4}{9}} \right\}$.

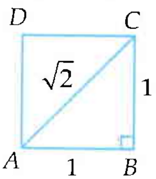
13. Fie x și y două numere naturale, astfel încât $0 < x < y < 9$. Determinați toate valorile posibile ale numărului rațional $q = \sqrt{0,xx(y) + 0,yy(x)}$.

14. Determinați numărul natural $\overline{abcd}$, știind că $\sqrt{\overline{1a0bc}} = 35 \cdot d$.

I.3. Numere iraționale, exemple, estimări. Mulțimea numerelor reale. Incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

În paragraful precedent am definit rădăcina pătrată a pătratului unui număr rațional și am arătat cum se calculează această rădăcină. Vom vedea acum că este nevoie să considerăm și rădăcina pătrată a numerelor raționale pozitive care nu sunt pătrate în $\mathbb{Q}$.

Exemplu: Fie $ABCD$ un pătrat cu latura $AB = 1$ cm. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ABC, obținem $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2$. Deci, ar fi normal să scriem $AC = \sqrt{2}$ (cm).



Acest rezultat, $\sqrt{2}$, nu este însă număr rațional!

Exemplul precedent pune în evidență necesitatea introducerii unor numere noi, care nu aparțin lui $\mathbb{Q}$. Astfel de numere sunt: $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{1,6}$; $\sqrt{\dfrac{3}{4}}$ etc. Acestea pot fi, de exemplu, considerate ca lungimile laturilor unor pătrate cu aria (respectiv) de 3; 5; 1,6; $\dfrac{3}{4}$ etc., dar ele apar și în alte probleme de matematică.

Se poate demonstra că, dacă $a \in \mathbb{Q}_+$ și a nu este pătrat în $\mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$.

Numerele de forma $\pm\sqrt{a}$, unde $a \in \mathbb{Q}_+$ și a nu este pătrat în $\mathbb{Q}$, se numesc numere **iraționale**.

Exemple: $\sqrt{2}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{\dfrac{25}{7}}$, $\sqrt{1,6}$, $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$, $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{0,2}$ sunt numere iraționale.

Există o infinitate de numere iraționale care nu se exprimă cu ajutorul radicalilor definiți anterior. Unul dintre aceste numere este π, care este egal cu raportul dintre lungimea unui cerc şi diametrul său. Altul este $\sqrt[3]{2}$.

Deoarece numerele raționale ne sunt mult mai familiare decât cele iraționale, vom încerca, de multe ori, să aproximăm (să estimăm) numerele iraționale prin numere raționale.

Iată cum putem face acest lucru pentru $\sqrt{2}$:

$1 < 2 < 4 \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2$

$(1{,}4)^2 < 2 < (1{,}5)^2 \Rightarrow 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$

$(1{,}41)^2 < 2 < (1{,}42)^2 \Rightarrow 1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$

$(1{,}414)^2 < 2 < (1{,}415)^2 \Rightarrow 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$

$\vdots$

Valorile aproximative pentru $\sqrt{2}$ sunt:

	Prin lipsă	**Prin adaos**	
Cu aproximație de o unitate	1	2	$1 < \sqrt{2} < 2$
Cu aproximație de o zecime	1,4	1,5	$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$
Cu aproximație de o sutime	1,41	1,42	$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$
Cu aproximație de o miime	1,414	1,415	$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$

De obicei, aproximăm $\sqrt{2}$ cu 1,41 : $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.

În mod analog, putem aproxima cu oricâte zecimale dorim (prin lipsă sau prin adaos) numerele iraționale $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$ etc.

Exemple: $\sqrt{3} \approx 1{,}73$ (aproximație de o sutime, prin lipsă)

$\sqrt{5} \approx 2{,}24$ (aproximație de o sutime, prin adaos)

$\sqrt{10} \approx 3{,}2$ (aproximație de o zecime, prin adaos)

$\pi \approx 3{,}14$ (aproximație de o sutime, prin lipsă).

Observație: Pentru a reține mai multe zecimale ale numărului π (ele sunt o infinitate şi nu se repetă periodic!) putem memora propoziția:

„Aşa e bine a scrie renumitul şi utilul număr", în care numărul literelor fiecărui cuvânt reprezintă o cifră din aproximarea lui π:

aşa $\rightarrow$ 3, e $\rightarrow$ 1, bine $\rightarrow$ 4, a $\rightarrow$ 1, scrie $\rightarrow$ 5, renumitul $\rightarrow$ 9, şi $\rightarrow$ 2, utilul $\rightarrow$ 6, număr $\rightarrow$ 5.

Prin urmare, $\pi \approx 3{,}14159265$.

Mulțimea numerelor reale, notată cu $\mathbb{R}$, este reuniunea dintre mulțimea numerelor raționale şi mulțimea numerelor iraționale.

Între mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ există următoarele relații de incluziune:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$